

Glückliche Zahlen

Bekanntlich handelt es sich bei Primzahlen um diejenigen natürlichen Zahlen, die genau zwei verschiedene Teiler haben, nämlich die 1 und sich selbst. Recht einfach lassen sich die Primzahlen durch das Sieb des Eratosthenes bestimmen — variiert man dieses Sieb geringfügig, erhält man eine neue Zahlenklasse mit überraschenden Eigenschaften.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung.	158
1.1 Das Sieb des Eratosthenes.	158
1.2 Glückliche Zahlen.	159
1.3 Tests auf $z \in_? \mathbb{P}$ und $z \in_? \mathbb{L}$	160
2 Prim- und Glückliche Zahlen.	161
2.1 Vergleich der Verteilungen – Zählfunktionen	161
2.1.1 Das Primzahl-Theorem (Merten)	162
2.1.2 Das Glückszahl-Theorem (Hawkins u. Briggs, Chowla)	163
2.2 Das Goldbach-Problem	163
2.3 Lücken.	164
2.4 Weitere Eigenschaften.	165
3 Bilder aus Primzahlen und Glücklichen Zahlen.	165
A Anhang: Implementierung auf Rechnern	167
A.1 Implementierung in DERIVE	167
A.1.1 Primzahlen	167
A.1.2 Sieben einer Liste zu einer Liste glücklicher Zahlen	167
A.1.3 Test auf Glückszahl	168
A.1.4 Errechnen der Nächsten	168
A.2 Implementierung in MuPAD	169
A.2.1 Primzahlen	169
A.2.2 Glückliche Zahlen	169
B Anhang: Tabellenmaterial	171
B.1 Die Primzahlen im Intervall [1..10000]	171
B.2 Die glücklichen Zahlen im Intervall [1..10000]	173

1 Einführung.

Primzahlen sind diejenigen Zahlen, die genau zwei Teiler haben, nämlich die 1 und sich selbst. Will man eine Teilmenge der Menge der Primzahlen (die im Folgenden mit $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N}_+ | p \text{ prim}\}$ bezeichnet wird) bestimmen, so ist das Abzählen der Teiler jeder Zahl jedoch recht aufwändig. Einfacher lassen sich alle Primzahlen die kleiner als ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ sind, mit Hilfe des Siebes des ERATOSTHENES¹ von den übrigen Zahlen trennen.

1.1 Das Sieb des Eratosthenes.

Da hierbei alle Nicht-Primzahlen aus der Ausgangsmenge aussortiert werden, heißt es ein Sieb. Das Vorgehen kann folgendermaßen beschrieben werden:

1. Schreibe alle Zahlen von 2 bis n auf.
2. Streiche jede zweite Zahl (bei 2 beginnend zu zählen) aus. Es fallen alle z für die gilt $z = \alpha \cdot 2, \alpha > 1$.
3. Suche die nächste noch nicht ausgestrichene Zahl i und streiche jede i -te Zahl (außer i selbst) aus, beginne dabei stets bei i zu zählen. Alle z mit $z = \alpha \cdot i, \alpha > 1$ werden ausgestrichen.
4. Wiederhole 3. bis $i \geq n$

Beispiel:

```

: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
2: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
3: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
5: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
7: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
11: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
13: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
17: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29

```

Bemerkungen:

1. Die bereits gestrichenen Zahlen sind nicht „weg“, sondern werden in jedem Schritt mitgezählt!
2. Es gibt effizientere Varianten des Siebes des ERATOSTHENES als die hier vorgestellte.

¹Eratosthenes von Kyrene, 275-194 v. Chr.

1.2 Glückliche Zahlen.

Eine Arbeitsgruppe um STANISŁAW MARCIN ULAM² modifizierte 1956 das Sieb des ERATOSTHENES geringfügig und gewann dadurch eine neue Klasse Zahlen. Das dazugehörige Siebverfahren ist das Folgende:

1. Schreibe alle Zahlen von 1 bis n auf.
2. Streiche jede zweite Zahl (bei 1 beginnend zu zählen) aus. Es fallen alle Vielfachen von 2, inklusive der 2 selbst.
3. Numeriere die Zahlen neu durch.
4. Suche die nächste noch nicht ausgestrichene Zahl i und streiche jede i -te Zahl aus. (Also jede, deren Index durch i teilbar ist)
5. Wiederhole 3. und 4. bis $i \geq n$

Manche Zahlen haben das Glück in jedem Schritt erneut von der Streichung verschont zu werden, ULAM nannte sie deshalb *lucky numbers*, also glückliche Zahlen.

Bemerkung: Die bereits gestrichenen Zahlen werden nicht mehr mitgezählt!

Das läßt sich leicht erreichen, wenn man die Zahlen $1..n$ als Liste³ $L := 1..n$ auffaßt und gestrichene Zahlen aus der Liste löscht. Es sei L_ℓ das ℓ -te Listenglied der Liste L .

1. $L := 1..n$ eine Liste ungerader Zahlen, $\hat{L} := 1$
2. $m := \min(L \setminus \hat{L}) = \min\{\ell \in L \mid \ell \notin \hat{L}\}$
3. $W := \{L_\ell \mid \ell = \alpha \cdot m, \alpha \geq 1\}$
4. $L := L \setminus W$
5. $\hat{L} := \hat{L} \cup \{m\}$
6. Wiederhole 2. bis 5. solange $i \geq n$

Dann ist \hat{L} eine Liste glücklicher Zahlen.

Beispiel: (die unterstrichenen Zahlen werden im nächsten Schritt gelöscht.)

3: 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

7: 1 3 7 9 13 15 19 21 25 27

9: 1 3 7 9 13 15 21 25

$p > |\{1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25\}| = 8 \rightarrow$ fertig!

Die Menge aller glücklicher Zahlen sei $\mathbb{L} := \{\ell \in \mathbb{N}_+ \mid \ell \text{ glücklich}\}$.

²Lwów (Polen), 1909-1984

³Wir interessieren uns hier nur für aufsteigend sortierte duplikatfreie Listen natürlicher Zahlen. Dies erleichtert einige Formulierungen erheblich.

1.3 Tests auf $z \in? \mathbb{P}$ und $z \in? \mathbb{L}$.

Während die Primzahlen aufgrund ihrer 2-Teilereigenschaft recht gut faßbar sind, gibt es für die glücklichen Zahlen keine rechten Anhaltspunkte, es gibt keine Sieb-unabhängige Charakterisierung der glücklichen Zahlen. Ein Primzahltest für $z \in \mathbb{N}_+$ kann wegen

$$p \text{ prim} \Leftrightarrow \forall_{1 < z < p} z \nmid p$$

folgendermaßen aussehen:

- Teste für alle $1 < z < p$ ob p durch z geteilt wird. Wenn nein $\Rightarrow p \in \mathbb{P}$.

Ein ähnlich einfacher Test kann für $l \in? \mathbb{L}$ (noch) nicht angegeben werden; Es muss der ganze Zahlbereich $1..l$ durchgeseibt werden, um eine Antwort zu erhalten. Allerdings gibt es eine notwendige Bedingung für $l \notin \mathbb{L}$. Vorher soll jedoch ein entsprechendes Kriterium für $p \in \mathbb{P}$ angegeben werden:

Sei $b \in \mathbb{N}_+$. Es gilt: (kleiner FERMAT'scher Satz)⁴

$$(b^p - b) \bmod p \neq 0 \Rightarrow p \notin \mathbb{P}$$

Die Umkehrung gilt (leider) nicht, denn es gibt $q \notin \mathbb{P}$ und $(b^q - b) \bmod q = 0$, diese Zahlen q werden *pseudoprime* genannt.

WILSON gab an:

$$((p-1)! + 1) \bmod p = 0 \iff p \in \mathbb{P}$$

Für die glücklichen Zahlen lautet ein Kriterium:

$$l \bmod 9 \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow l \notin \mathbb{L}$$

Die Zahlen 2, 5, 8 sind von der Gestalt $3k + 2, k \in \{0, 1, 2\}$ und werden in den ersten beiden Siebschritten ausgelöscht, so dass diese nicht als Reste auftreten können.

STEIN gibt folgenden Algorithmus an, der $l \in? \mathbb{L}$ für $l \in (2\mathbb{N}_+ + 1)$ testet: (Es sei ℓ_k die k -te glückliche Zahl.)

1. $R_2 := \frac{l+1}{2}$
2. $\ell_k | R_k \Rightarrow l \notin \mathbb{L}$
3. $R_{k+1} := R_k - \lfloor \frac{R_k}{\ell_k} \rfloor$
4. Iteriere 2. und 3. über k bis $\ell_k | R_k$ oder $\ell_k > R_k$.

An dieser Stelle soll noch ein Algorithmus angegeben werden, der die k -te glückliche Zahl l_k aus den vorherigen durch weiteres Sieben gemäß

1. Sei l_{m-1} die größte glückliche Zahl kleinergleich k .
2. $R_m := k$
3. $j := \begin{cases} \lfloor \frac{R_m}{l_{m-1}-1} \rfloor & \text{falls } (l_{m-1} - 1) \nmid R_m \\ \lfloor \frac{R_m}{l_{m-1}-1} \rfloor - 1 & \text{sonst} \end{cases}$
4. $R_{m-1} = R_m + j$
5. Wiederhole 3. und 4. bis $l_k = 2R_2 - 1$

errechnet. Es ist nicht so einfach, die k -te Primzahl algorithmisch zu berechnen, ohne dabei das Sieb voll zu durchlaufen.

⁴Pierre de Fermat

2 Prim- und Glückliche Zahlen.

2.1 Vergleich der Verteilungen – Zählfunktionen

Seien

$$\pi(n) := |\{p \in \mathbb{P} | n \geq p\}|$$

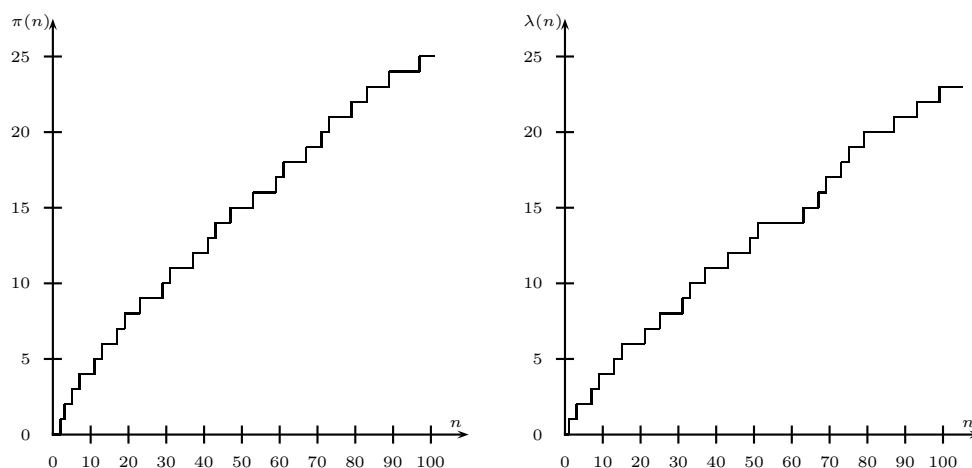
$$\lambda(n) := |\{\ell \in \mathbb{L} | n \geq \ell\}|$$

die prim- bzw. glückszahlzählenden Ausdrücke. Sie geben die Anzahl aller Prim- bzw. Glückszahlen an, die kleinergleich n sind. Es gibt keine exakten Ausdrücke für die Zählfunktionen, die Werte werden experimentell ermittelt, indem schlichtweg abgezählt wird.

Dann ergibt sich durch Auswertung der mit Hilfe Rechner gewonnener Daten folgende Tabelle:

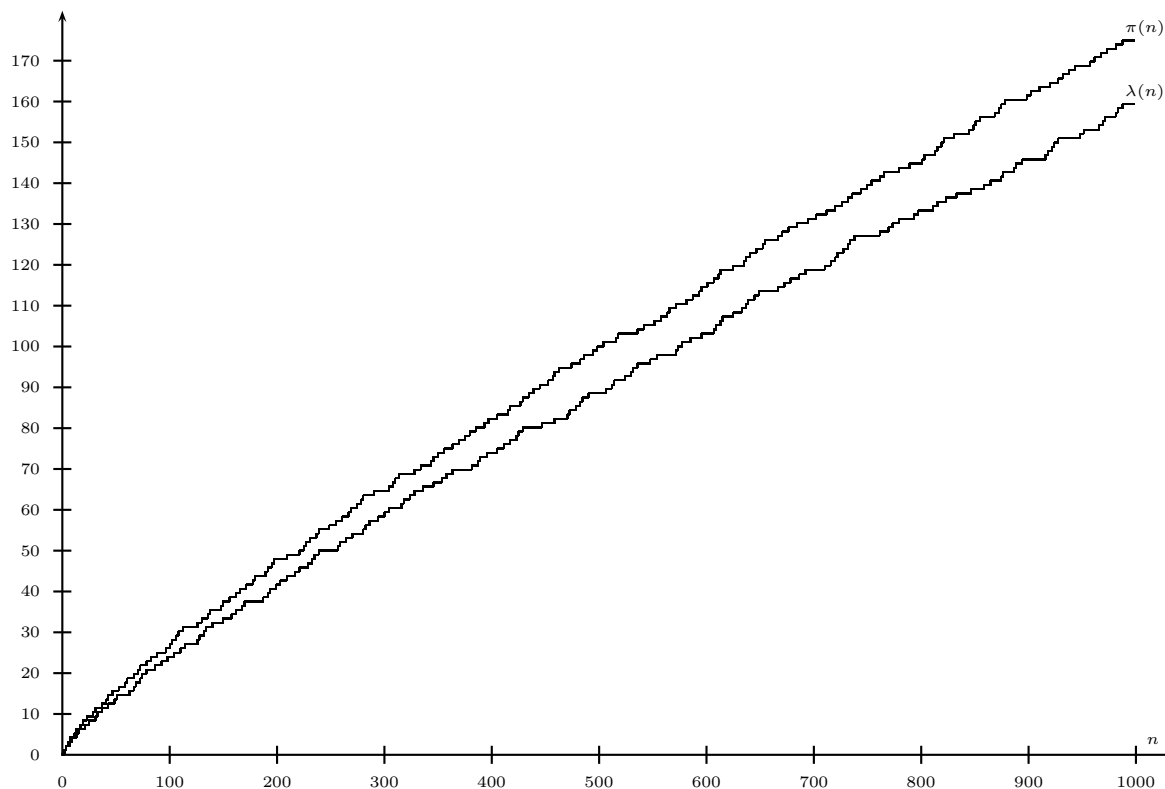
n	$\pi(n)$	$\lambda(n)$
100	25	23
10000	1439	1313
20000	2263	2066
30000	3246	2970
40000	4204	3840
1000000	78498	71918

Trägt man $\pi(n)$ bzw. $\lambda(n)$ gegen n auf, so erhält man für $0 \leq n \leq 100$:



Offensichtlich zeigen beide Zählfunktionen ein ähnliches Verhalten. Die zweite Abbildung zeigt, dass es in dem recht großen Intervall zwischen 51 und 63 keine glücklichen Zahlen gibt.

In dem wesentlich größeren Bereich $0 \leq n \leq 1000$ (vgl. Abbildung nächste Seite) erkennen wir: Die glücklichen Zahlen sind (zumindest in dem betrachteten Bereich) seltener als die Primzahlen! Es gibt aber zu den unendlich vielen Primzahlen auch unendlich viele glückliche Zahlen, wie GARDNER angibt. Es sei aber offen, ob auch unendlich viele Zahlen zugleich prim und glücklich sind. In relativ regelmäßigen Abständen fallen bei beiden Verteilungen – insbesondere aber bei den glücklichen Zahlen – ausgeprägte Terrassen im stufigen Gesamtverlauf auf.



2.1.1 Das Primzahl-Theorem (Merten)

Das Primzahl-Theorem besagt:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

und bedeutet⁵, dass $\frac{n}{\ln n}$ eine gute Näherung für $\pi(n)$ ist ($\ln n$ steht für den „natürlichen“ Logarithmus zur Basis e von n). Das bedeutet aber nicht $\pi(n) - \frac{n}{\ln n} \ll 1$, sondern vielmehr

$$\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Folgerungen:

- Wir können $\pi(n)$ approximieren:

$$\pi(n) \approx \left[\frac{n}{\ln n - 1} \right]$$

Beispiel:

n	$\pi(n)$	$\left[\frac{n}{\ln n - 1} \right]$
10	4	8
100	25	28
1.000	168	169
10.000	1229	1218
100.000	9592	9512
1.000.000	78498	78030
10.000.000	664579	661459
100.000.000	5761455	5740304

⁵~ lies: *verhält sich asymptotisch zu*

- Die k -te Primzahl p_k läßt sich abschätzen:

$$p_k \approx [k \cdot (\ln k + \ln \ln k - 1)]$$

Beispiel:

Für die $k = 1.000.000$ -te Primzahl liefert der Ausdruck $[k \cdot (\ln k + \ln \ln k - 1)]$ $p_k \approx 15.441.302$ tatsächlich ist $p_k = 15.485.863$.

- Die Wahrscheinlichkeit mit der eine beliebige Zahl $z \in \mathbb{N}_+$ prim ist läßt sich angeben:

$$W(z \in \mathbb{P}) \approx \frac{1}{\ln z}$$

- Der Abstand zweier benachbarter Primzahlen p, q läßt sich abschätzen:

$$|p - q| \sim \ln p$$

2.1.2 Das Glückszahl-Theorem (Hawkins u. Briggs, Chowla)

HAWKINS gibt das Glückszahl-Theorem an, das analog zum Primzahl-Theorem lautet:

$$\lambda(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

- Die k -te glückliche Zahl l_k läßt sich abschätzen:

$$l_k \sim k \ln k$$

besser:

$$l_k \approx \left[k \cdot \left(\ln k + \frac{1}{2} \cdot (\ln \ln k)^2 \right) \right]$$

Beispiel:

Es folgt $l_{23} \approx 87$, tatsächlich gilt: $l_{23} = 99$; $l_{2066} \approx 20038$, tatsächlich ist $l_{2066} = 19993$.

2.2 Das Goldbach-Problem

GOLDBACH⁶ vermutete 1742 in einem Brief gegenüber EULER, dass sich jede gerade Zahl > 3 als Summe zweier ungerader Primzahlen darstellen lasse. Dies konnte bis heute nicht bewiesen werden, allerdings konnte auch noch kein Gegenbeispiel gefunden werden. Das GOLDBACH-Problem kann auf glückliche Zahlen ausgedehnt werden:

- $2\mathbb{N}_+ =? \{z | z = p + q; p, q \in \mathbb{P}\}$ gilt für alle $6 \leq 2 \cdot n \leq 100.000.000$
- $2\mathbb{N}_+ =? \{z | z = k + l; k, l \in \mathbb{L}\}$ gilt für alle $2 \leq 2 \cdot n \leq 1.000.000$.

IWAN MATWEJEWITSCH WINOGRADOW⁷ hat zwischenzeitlich zeigen können, dass sich jede ungerade Zahl als Summe dreier Primzahlen darstellen läßt. LAGRANGE bewies: Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von höchstens vier Quadratzahlen angeben. Für $n \in \mathbb{N}$, n hinreichend groß konnte die Goldbachsche Vermutung bewiesen werden.

⁶Christian Goldbach, 1690-1764

⁷geb. 1891

2.3 Lücken.

Primzahlzwillinge heißen zwei Primzahlen p und q falls $|p - q| = 2$, z.B. sind 3 und 5 (5 und 7, 11 und 13, ...) Primzahlzwillinge.

Auch in der Folge der glücklichen Zahlen gibt es Glückszahlzwillinge k, ℓ mit $k, \ell \in \mathbb{L}$ und $|k - \ell| = 2$, z.B. 1 und 3 (7 und 9, 13 und 15, ...).

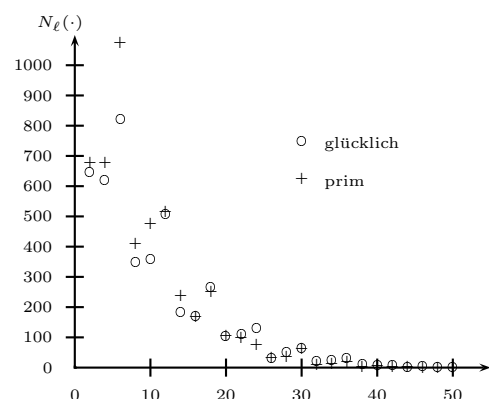
Es stellt sich die Frage, ob es

1. unendlich viele Primzahlzwillinge gibt (ungeklärt)
2. unendlich viele Glückszahlzwillinge gibt (ungelöst)
3. in einem Intervall $[1..n], n \in \mathbb{N}_+$ genauso viele Primzahlzwillinge wie Glückszahlzwillinge gibt (siehe unten)

Darüberhinaus lassen sich Lücken beliebiger Länge in den Mengen \mathbb{L} und \mathbb{P} untersuchen. Folgende Tabelle gibt die Häufigkeit N_ℓ von Lücken der Länge $\ell \in 2\mathbb{N}_+$ in der Folge der Primzahlen bzw. Glückszahlen im Intervall $[1..48600]$ an:

(Es ist zu beachten, dass $x, y \in \mathbb{L}$ bzw. \mathbb{P} direkt aufeinanderfolgend sein müssen, d.h. $\nexists z \in \mathbb{L}$ bzw. $\mathbb{P} : x < z < y$.)

ℓ	$N_\ell(\mathbb{L})$	$N_\ell(\mathbb{P})$
2	647	680
4	621	677
6	824	1075
8	351	411
10	361	478
12	509	517



Es fällt auf, dass in den untersuchten Folgen größere Lücken seltener auftreten als kleinere, außerdem gilt $N_\ell(\mathbb{L}) < N_\ell(\mathbb{P})$. Das kann daran liegen, dass die glücklichen Zahlen weniger dicht liegen. Es gibt regelrechte Peaks bei Vielfachen von 6.

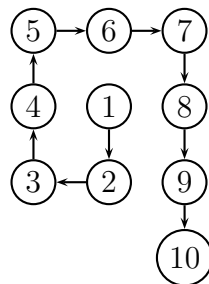
Damit läßt sich obige Frage vorläufig beantworten: Es gibt zwar nicht genauso viele Glückszahlzwillinge wie Primzahlzwillinge in einem festen Intervall, aber die entsprechenden Anzahlen liegen nahe beieinander.

2.4 Weitere Eigenschaften.

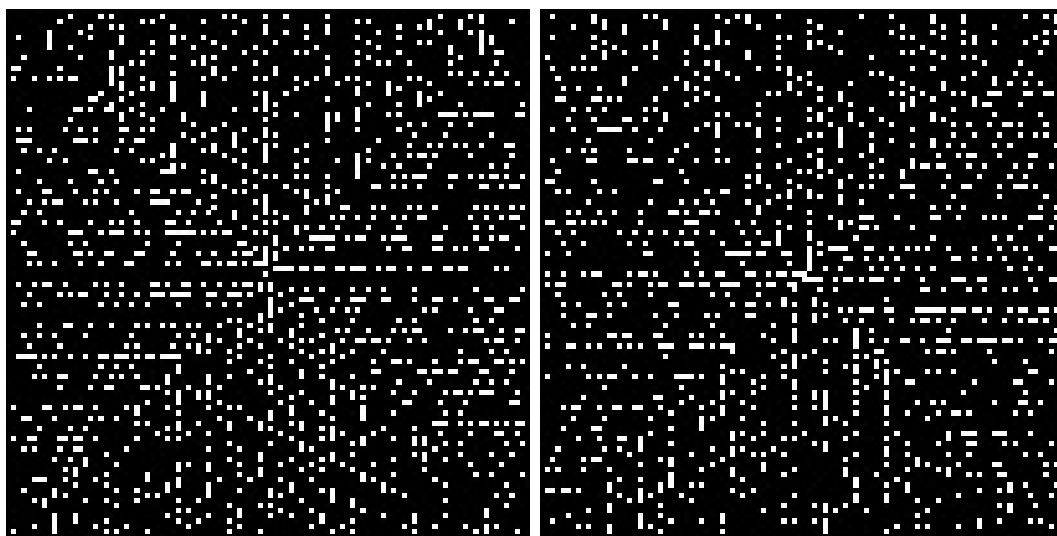
- CHARLES ASHBACHER stellte fest: Jede glückliche Zahl kommt am Ende einer größeren glücklichen Zahl vor: 7 an 37, 9 an 49, 15 an 615, 87 an 2187, 579 an 96579. (Ein Beweis steht noch aus.)
- Außerdem gibt es wohl kein Polynom, das ausschließlich glückliche Zahlen erzeugt.
- Primzahlgeheimnis: Unter dem Primzahlgeheimnis versteht man die Tatsache, dass man einige Eigenheiten der Primzahlen zwar beweisen kann, aber nicht weiß, warum. Dieses „warum“ schob man mystisch auf die Primzahlen. Viele Eigenschaften, von denen man dachte, sie treffen ausschließlich auf Primzahlen zu, lassen sich nun tatsächlich auf andere durch Sieben generierte Klassen von Zahlen übertragen. Damit hat das Primzahlgeheimnis einen Teil seiner Wichtigkeit preisgegeben — und gleichzeitig übertragen auf die Siebe.

3 Bilder aus Primzahlen und Glücklichen Zahlen.

ULAM stellte fest, dass sich regelmäßige Strukturen ergeben, wenn man die Punkte in der Ebene durchnumeriert: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow z \in \mathbb{N}_+$. Er schlug unter anderem zwei Möglichkeiten vor, die im Folgenden kurz vorgestellt werden sollen, es sind aber beliebig viele andere denkbar:

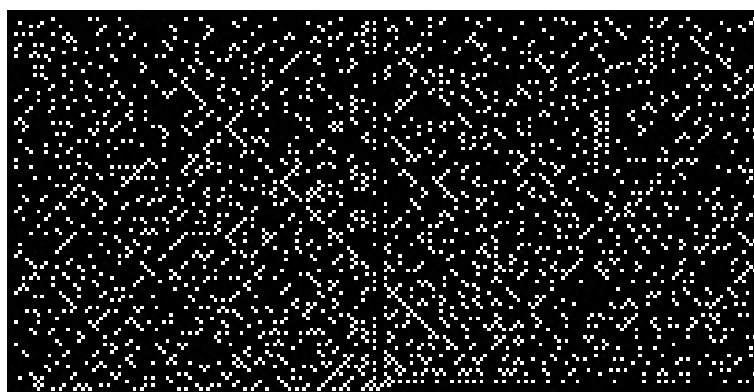
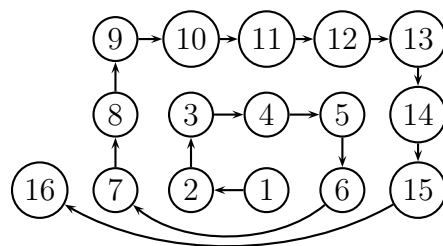


Dann ergeben sich folgende Bilder, wenn man jeweils für $z \in \mathbb{P}$ bzw. \mathbb{L} einen weißen Punkt, sonst einen schwarzen setzt. Es sind 10.000 Punkte eingetragen.

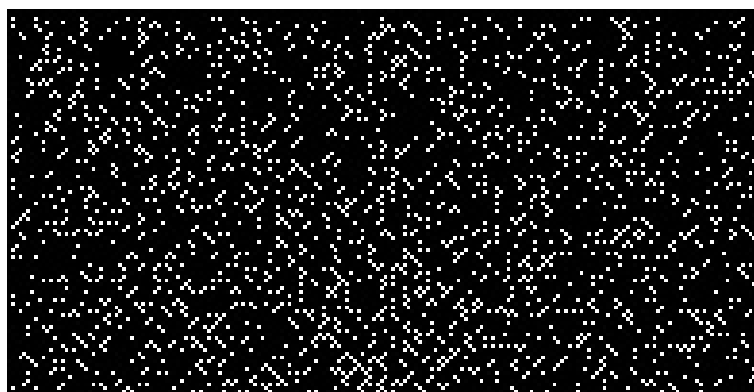


Die sich ergebende Punktstrukturen (links *prim* - rechts *glücklich*) sind unverkennbar ähnlich.

Eine andere Verteilung der Zahlen auf die positive (Halb-)Ebene ergibt die folgende Vorgehensweise:



prim



glücklich

Bunte Bilder erhält man wenn als Fehlfarbe z.B. die Anzahl der Teiler (bei Primzahlen) oder die Nummer des Schrittes der erfolgten Streichung (bei glücklichen Zahlen) verwendet wird. Hier sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt.

A Anhang: Implementierung auf Rechnern

A.1 Implementierung in DERIVE

A.1.1 Primzahlen

- `next_prime(i)`
liefert die kleinste Primzahl größer i .
- `prim(i) := if(next_prime(i-1)=i, i, ●)`
gibt i aus, falls i Primzahl ist, sonst ein Symbol.
- `tab := vector(vector(prim(1+i+k), k, 1, 10), i, 0, 90, 10)`
liefert eine Tabelle der Zahlen von 2 bis 101, in denen die Nicht-Primzahlen gestrichen sind.

A.1.2 Sieben einer Liste zu einer Liste glücklicher Zahlen

- Eine Liste ist in DERIVE ein Vektor:
`vector(f(i), i, von, increment, bis)`
dabei ist `increment` optional.
- Die Liste ungerader Zahlen von 1 bis 99 erhalten wir mit
`liste := vector(2i-1, i, 1, 50)`
- `mark(l, k) := vector(if(element(l, i)=k, i, 0), i, dimension(l))`
gibt eine Liste zurück, in der das Element k durch eine 0 ersetzt wird. (Nicht das k -te Element!). Gibt es kein Element k , so wird die Liste l unverändert zurückgegeben.
- `del(l, k) :=`
`vector(if(n<k,element(l, n),element(l, n+1)),n,dimension(l)-1)`
gibt eine Liste zurück, in der das k -te Element gelöscht ist.
- `entferne(l) :=`
`if(max(mark(l, 0)=0), l, entferne(del(l, max(mark(l, 0)))))`
löscht rekursiv alle mit 0 markierten Einträge aus der Liste.
- `marklucky(l, j) :=`
`vector(if(mod(i, j)=0, 0, element(l, i)), i, dimension(l))`
markiert in der Liste l jedes Element dessen Index ein Vielfaches von j ist durch eine 0.
- `neu(l, ll) := element(l, dimension(ll)+1)`
sucht das nächste zu Streichende Element aus den Listen l und ll .
- Schließlich gibt
`lucky(l, ll) := if(dimension(l)<neu(l, ll), l,`
`lucky(entferne(marklucky(l, neu(l, ll))),`
`append(ll, [neu(l, ll)]))`
eine Liste glücklicher Zahlen, generiert aus den Ausgangslisten l und ll gemäß dem vorgestellten Algorithmus.

- `lucky(liste, [1])`
gibt die glücklichen Zahlen der Liste `liste` aus.

A.1.3 Test auf Glückszahl

- `luckies := lucky(liste, [1])`
sei eine gegebene Liste glücklicher Zahlen.
- `neu(r, l, k) :=`
`element(r, k)-floor(element(r, k), element(luckies, k))`
errechnet eine Hilfsfunktion des Algorithmus
- `islucky(l, r, k) :=`
`if(mod(element(r, k), element(luckies, k))=0, 0,`
`islucky(l, append(r, [neu(r, l, k)]), k+1))`
ist eine Variante des iterativen Algorithmus, rekursiv formuliert.
- `islucky(l) := islucky(l, [0, (l+1)/2], 2)`
setzt dann die Anfangsbedingungen.

A.1.4 Errechnen der Nächsten

- `glil(l, k, i) := if(element(l, i+1)<=k, glil(l, k, i+1), i)`
sucht die größte glückliche Zahl aus der Liste `l` kleinergleich `k`.
- `glil(l, k) := glil(l, k, 1)`
dient wieder der Rekurierung eines iterativen Algorithmus
- `j(m, r) := if(mod(r, element(luckies, m-1)-1)=0,`
`floor(r, element(luckies, m-1)-1)-1,`
`floor(r, element(luckies, m-1)-1))`
berechnet die Hilfsvariable `j`.
- `next_lucky_(m, r) := if(m=2, 2r-1, next_lucky_(m-1, r+j(m, r)))`
- `kth_lucky(k) := nextlucky_(glil(luckies, k)+1, k)`
gibt die `k`-te glückliche Zahl.

A.2 Implementierung in MuPAD

A.2.1 Primzahlen

```

prim:=proc(n)
//gibt eine Menge aller Primzahlen  $\leq n$  aus.
begin
  M:={i $ i=2..n};
//M = {i|2 ≤ i ≤ n}
  P:={};
//in P werden die Primzahlen gesammelt
  repeat
    m:=min(op(M minus P));
//m = min{M \ P}, also die kleinste Zahl aus M, die nicht in P liegt
    W:={m*i $ i=2..(n div m)};
//in W werden alle (echten) Vielfachen von m gesammelt, die noch in M liegen
    M:=M minus W;
//M := M \ W
    P:=P union {m};
//P := P ∪ {m}
  until nops(W)=0 end_repeat;
//solange, bis W = {}, also bis das kleinste Vielfache von m schon größer als das größte
Element in M ist
return (M);
//M als Ergebnis zurückgeben
end_proc;

```

A.2.2 Glückliche Zahlen

```

listminus:=proc(a,b)
//berechnet  $a \setminus b$  für zwei duplikatfreie sortierte Listen a, b.
begin
  return(sort([op({op(a)} minus {op(b)})]));
end_proc;

```

```

minlistminus:=proc(a,b)
// berechnet  $\min\{a \setminus b\}$  für zwei duplikatfreie sortierte Listen a, b. Ist effizienter als min(op(listminus(a
aufzurufen!
begin
  return(min(op({op(a)} minus {op(b)})));
end_proc;

```

```

lucky:=proc(n:Type::NonNegInt)
//gibt alle lucky numbers kleinergleich  $n + 1$  in einer Liste aus. Parameter n ist eine
nicht-negative ganze Zahl größer 1
local L,l,W,m;
begin
  L:=[2*i+1 $ i=0..(n div 2)];

```

```

//L ist dann Liste aller ungeraden Zahlen 1..n + 1
l:=[1]:
//In l werden die glücklichen Zahlen aufgesammelt. Beginnen mit 1.
  repeat
    m:=minlistminus(L,l):
    W:=[L[i*m] $ i=1..(nops(L) div m)]:
//In W werden alle Listenelemente aus L aufgenommen, deren Position ein (nicht not-
wendigerweise echtes) Vielfaches von m ist
    L:=listminus(L,W):
    l:=l.[m]:
//m ist dann glücklich und wird an l angehängt.
    until (nops(l)>=nops(L)) end_repeat:
return(l);
end_proc;

```

Der Aufruf

```
Luckies:=lucky(5);
```

liefert dann eine Liste der glücklichen Zahlen kleinergleich 5:

```
[1, 3]
```

B Anhang: Tabellenmaterial

B.1 Die Primzahlen im Intervall [1..10000]

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109
113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229
233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353
359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479
487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617
619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757
761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907
911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033
1039 1049 1051 1061 1063 1069 1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151 1153
1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223 1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283
1289 1291 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373 1381 1399 1409 1423 1427
1429 1433 1439 1447 1451 1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531
1543 1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637
1657 1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783
1787 1789 1801 1811 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889 1901 1907 1913
1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987 1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053
2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129 2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179
2203 2207 2213 2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287 2293 2297 2309 2311
2333 2339 2341 2347 2351 2357 2371 2377 2381 2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423 2437
2441 2447 2459 2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557 2579 2591 2593
2609 2617 2621 2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711
2713 2719 2729 2731 2741 2749 2753 2767 2777 2789 2791 2797 2801 2803 2819 2833 2837
2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903 2909 2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971
2999 3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079 3083 3089 3109 3119 3121 3137
3163 3167 3169 3181 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253 3257 3259 3271 3299
3301 3307 3313 3319 3323 3329 3331 3343 3347 3359 3361 3371 3373 3389 3391 3407 3413
3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511 3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547
3557 3559 3571 3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643 3659 3671 3673 3677
3691 3697 3701 3709 3719 3727 3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823
3833 3847 3851 3853 3863 3877 3881 3889 3907 3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947
3967 3989 4001 4003 4007 4013 4019 4021 4027 4049 4051 4057 4073 4079 4091 4093 4099
4111 4127 4129 4133 4139 4153 4157 4159 4177 4201 4211 4217 4219 4229 4231 4241 4243
4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297 4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397
4409 4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507 4513 4517 4519 4523 4547
4549 4561 4567 4583 4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657 4663 4673 4679
4691 4703 4721 4723 4729 4733 4751 4759 4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817 4831
4861 4871 4877 4889 4903 4909 4919 4931 4933 4937 4943 4951 4957 4967 4969 4973 4987
4993 4999 5003 5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087 5099 5101 5107 5113
5119 5147 5153 5167 5171 5179 5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279 5281
5297 5303 5309 5323 5333 5347 5351 5381 5387 5393 5399 5407 5413 5417 5419 5431 5437
5441 5443 5449 5471 5477 5479 5483 5501 5503 5507 5519 5521 5527 5531 5557 5563 5569
5573 5581 5591 5623 5639 5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669 5683 5689 5693 5701 5711
5717 5737 5741 5743 5749 5779 5783 5791 5801 5807 5813 5821 5827 5839 5843 5849 5851
5857 5861 5867 5869 5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939 5953 5981 5987 6007 6011 6029
6037 6043 6047 6053 6067 6073 6079 6089 6091 6101 6113 6121 6131 6133 6143 6151 6163

6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221 6229 6247 6257 6263 6269 6271 6277 6287 6299 6301
6311 6317 6323 6329 6337 6343 6353 6359 6361 6367 6373 6379 6389 6397 6421 6427 6449
6451 6469 6473 6481 6491 6521 6529 6547 6551 6553 6563 6569 6571 6577 6581 6599 6607
6619 6637 6653 6659 6661 6673 6679 6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761 6763
6779 6781 6791 6793 6803 6823 6827 6829 6833 6841 6857 6863 6869 6871 6883 6899 6907
6911 6917 6947 6949 6959 6961 6967 6971 6977 6983 6991 6997 7001 7013 7019 7027 7039
7043 7057 7069 7079 7103 7109 7121 7127 7129 7151 7159 7177 7187 7193 7207 7211 7213
7219 7229 7237 7243 7247 7253 7283 7297 7307 7309 7321 7331 7333 7349 7351 7369 7393
7411 7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487 7489 7499 7507 7517 7523 7529 7537 7541
7547 7549 7559 7561 7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643 7649 7669 7673
7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723 7727 7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829
7841 7853 7867 7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919 7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993
8009 8011 8017 8039 8053 8059 8069 8081 8087 8089 8093 8101 8111 8117 8123 8147 8161
8167 8171 8179 8191 8209 8219 8221 8231 8233 8237 8243 8263 8269 8273 8287 8291 8293
8297 8311 8317 8329 8353 8363 8369 8377 8387 8389 8419 8423 8429 8431 8443 8447 8461
8467 8501 8513 8521 8527 8537 8539 8543 8563 8573 8581 8597 8599 8609 8623 8627 8629
8641 8647 8663 8669 8677 8681 8689 8693 8699 8707 8713 8719 8731 8737 8741 8747 8753
8761 8779 8783 8803 8807 8819 8821 8831 8837 8839 8849 8861 8863 8867 8887 8893 8923
8929 8933 8941 8951 8963 8969 8971 8999 9001 9007 9011 9013 9029 9041 9043 9049 9059
9067 9091 9103 9109 9127 9133 9137 9151 9157 9161 9173 9181 9187 9199 9203 9209 9221
9227 9239 9241 9257 9277 9281 9283 9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377
9391 9397 9403 9413 9419 9421 9431 9433 9437 9439 9461 9463 9467 9473 9479 9491 9497
9511 9521 9533 9539 9547 9551 9587 9601 9613 9619 9623 9629 9631 9643 9649 9661 9677
9679 9689 9697 9719 9721 9733 9739 9743 9749 9767 9769 9781 9787 9791 9803 9811 9817
9829 9833 9839 9851 9857 9859 9871 9883 9887 9901 9907 9923 9929 9931 9941 9949 9967
9973

B.2 Die glücklichen Zahlen im Intervall [1..10000]

1 3 7 9 13 15 21 25 31 33 37 43 49 51 63 67 69 73 75 79 87 93 99 105 111 115 127 129 133
135 141 151 159 163 169 171 189 193 195 201 205 211 219 223 231 235 237 241 259 261
267 273 283 285 289 297 303 307 319 321 327 331 339 349 357 361 367 385 391 393 399
409 415 421 427 429 433 451 463 475 477 483 487 489 495 511 517 519 529 535 537 541
553 559 577 579 583 591 601 613 615 619 621 631 639 643 645 651 655 673 679 685 693
699 717 723 727 729 735 739 741 745 769 777 781 787 801 805 819 823 831 841 855 867
873 883 885 895 897 903 925 927 931 933 937 957 961 975 979 981 991 993 997 1009 1011
1021 1023 1029 1039 1041 1053 1057 1087 1093 1095 1101 1105 1107 1117 1123 1147 1155
1167 1179 1183 1189 1197 1201 1203 1209 1219 1231 1233 1245 1249 1251 1261 1263 1275
1281 1285 1291 1303 1309 1323 1329 1339 1357 1365 1369 1387 1389 1395 1401 1417 1419
1435 1441 1455 1459 1471 1473 1485 1491 1495 1497 1501 1503 1519 1533 1543 1545 1563
1567 1575 1579 1585 1587 1597 1599 1611 1639 1641 1645 1659 1663 1675 1693 1701 1705
1711 1723 1731 1737 1749 1765 1767 1771 1773 1777 1797 1801 1809 1819 1827 1831 1833
1839 1857 1869 1879 1893 1899 1915 1921 1923 1933 1941 1945 1959 1963 1965 1977 1983
1987 1995 2001 2019 2023 2031 2053 2059 2065 2067 2079 2083 2085 2095 2113 2115 2121
2125 2127 2133 2163 2173 2187 2209 2211 2215 2217 2221 2239 2251 2253 2257 2271 2277
2281 2283 2301 2311 2317 2323 2335 2343 2355 2365 2379 2395 2403 2407 2409 2415 2419
2427 2439 2445 2461 2467 2473 2479 2491 2493 2505 2511 2523 2527 2545 2557 2563 2571
2575 2587 2589 2593 2599 2607 2625 2635 2647 2649 2653 2661 2667 2671 2689 2697 2715
2725 2755 2763 2773 2781 2785 2787 2797 2815 2817 2821 2823 2827 2835 2841 2845 2851
2877 2887 2899 2901 2905 2913 2923 2943 2953 2961 2971 2973 2977 2983 3003 3007 3027
3031 3037 3039 3049 3055 3073 3075 3091 3097 3099 3109 3111 3121 3123 3133 3153 3163
3171 3175 3183 3187 3199 3213 3223 3229 3235 3243 3259 3261 3289 3297 3301 3307 3313
3325 3339 3351 3355 3363 3381 3403 3405 3409 3411 3427 3433 3439 3451 3453 3465 3477
3481 3487 3489 3495 3499 3507 3559 3565 3571 3579 3595 3597 3603 3607 3613 3621 3625
3633 3655 3661 3663 3669 3675 3685 3687 3697 3709 3717 3721 3727 3747 3753 3763 3771
3781 3789 3793 3795 3811 3843 3847 3849 3865 3873 3879 3889 3891 3897 3909 3915 3931
3943 3951 3955 3969 3975 3981 3991 3999 4003 4015 4023 4033 4035 4041 4045 4063 4069
4081 4095 4105 4107 4129 4131 4161 4165 4173 4179 4189 4195 4201 4203 4207 4227 4237
4251 4255 4257 4263 4269 4285 4287 4315 4321 4329 4335 4363 4377 4383 4389 4399 4413
4431 4441 4443 4455 4461 4465 4483 4485 4495 4509 4519 4521 4539 4551 4561 4567 4569
4573 4587 4609 4611 4621 4623 4629 4645 4647 4653 4663 4671 4675 4695 4699 4713 4717
4725 4741 4761 4767 4773 4797 4801 4809 4813 4819 4833 4837 4839 4843 4851 4863 4867
4881 4887 4893 4929 4951 4963 4965 4969 4977 4987 4989 4993 4999 5001 5007 5019 5029
5041 5043 5049 5053 5089 5103 5127 5137 5139 5149 5151 5157 5169 5179 5181 5191 5211
5217 5229 5233 5235 5253 5259 5277 5283 5293 5295 5299 5325 5335 5341 5343 5371 5377
5379 5385 5409 5419 5427 5433 5449 5455 5463 5473 5487 5491 5503 5515 5527 5547 5551
5559 5569 5577 5587 5589 5593 5599 5613 5617 5637 5641 5649 5655 5661 5671 5673 5679
5691 5701 5707 5713 5719 5737 5755 5763 5767 5769 5803 5809 5817 5827 5833 5839 5851
5869 5883 5889 5893 5901 5905 5911 5913 5923 5959 5965 5967 5971 5973 5977 5991 5997
6009 6019 6031 6049 6055 6061 6079 6093 6111 6115 6123 6141 6147 6159 6163 6175 6177
6195 6211 6229 6237 6243 6249 6253 6271 6273 6279 6301 6309 6331 6345 6351 6355 6363
6367 6369 6373 6379 6385 6399 6411 6415 6427 6433 6435 6447 6463 6471 6475 6477 6501
6505 6523 6531 6535 6541 6553 6559 6567 6573 6601 6621 6625 6631 6661 6663 6667 6669
6679 6687 6693 6715 6723 6733 6741 6745 6747 6753 6757 6763 6765 6783 6787 6789 6841
6849 6867 6871 6883 6891 6909 6915 6921 6931 6933 6937 6951 6981 6985 6999 7003 7009
7035 7041 7045 7047 7069 7077 7081 7087 7101 7111 7129 7135 7153 7167 7171 7173 7183

7191 7195 7197 7207 7215 7231 7233 7237 7245 7249 7279 7293 7299 7311 7321 7333 7339
7341 7345 7357 7359 7371 7377 7395 7401 7405 7419 7435 7437 7443 7447 7459 7471 7489
7501 7503 7507 7531 7533 7549 7551 7563 7567 7575 7585 7591 7593 7603 7609 7629 7633
7639 7645 7677 7687 7689 7701 7711 7717 7737 7755 7779 7791 7795 7801 7803 7813 7827
7833 7837 7855 7881 7885 7897 7899 7909 7917 7921 7929 7939 7947 7951 7963 7969 7971
8001 8005 8007 8013 8037 8047 8071 8073 8085 8089 8107 8109 8127 8131 8139 8151 8161
8169 8173 8175 8191 8193 8221 8223 8227 8233 8253 8257 8263 8269 8283 8289 8299 8325
8331 8347 8359 8365 8367 8379 8409 8413 8421 8445 8449 8467 8473 8475 8479 8487 8493
8515 8535 8539 8551 8553 8575 8577 8583 8589 8601 8605 8611 8617 8635 8637 8641 8647
8655 8661 8673 8683 8719 8757 8769 8773 8787 8793 8805 8809 8827 8829 8833 8835 8841
8869 8871 8895 8913 8931 8937 8947 8955 8961 8977 8979 8989 8995 8997 9009 9031 9033
9061 9063 9073 9075 9081 9085 9115 9117 9121 9123 9135 9139 9145 9151 9177 9181 9211
9213 9223 9231 9235 9249 9253 9267 9273 9277 9285 9291 9303 9315 9331 9339 9349 9373
9387 9399 9403 9409 9421 9423 9429 9441 9451 9457 9471 9475 9481 9483 9487 9501 9535
9537 9543 9547 9549 9555 9561 9567 9613 9621 9625 9631 9643 9649 9661 9663 9675 9687
9691 9703 9727 9733 9751 9753 9775 9787 9789 9795 9801 9807 9811 9813 9837 9841 9883
9895 9915 9927 9937 9957 9961 9979 9985 9987 9997 9999

Literatur

- [1] C. St. Ogilvy: Zahlentheorie. München, Goldmann 1970. Originaltitel: Excursions in Number Theory. S. 100-102
- [2] C. St. Ogilvy: Mathematische Leckerbissen: über 150 noch ungelöste Probleme. Braunschweig, Vieweg 1969. Originaltitel: Tomorrow's Math - Unsolved Problems for the Amateur. S. 54-55
- [3] M. Gardner: Lucky Numbers and 2187, in: The Mathematics Intelligencer. Berlin, Springer Vol. 19 No. 2. p.26-29
- [4] St. M. Ulam: A Collection of Mathematical Problems. Los Alamos, New Mexico. London, Interscience Publishers 1960
- [5] Hawkins: The Lucky Number Theorem, in: Mathematics Magazine, Vol. 31 1957/58, p.277-280, auch p.81-84
- [6] St. M. Ulam: On Certain Sequences of Integers Defined by Sieves, in: Mathematics Magazine, p.117-122
- [7] St. M. Ulam: A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes, in: American Mathematical Monthly, Vol. 71 No. 5 May 1964, p.517-520
- [8] St. M. Ulam: Selected Works. Sets, Numbers and Universes, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
Daraus:
P. Stein: Remark on: On Certain Sequences of Integers Defined by Sieves p.690-695
Preface, p.xi-xiii
Außerdem auch Reprints von 2 und 3.
- [9] N.J.A. Sloane: An On-Line Version of the Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego, Academic Press, 1995.
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/eisonline.html>
- [10] A. Bogomolny: What is a Number.
http://www.cut-the-knot.com/do_you_know/numbers.html